Exploremos probabilidad

Esta mañana estuvo lloviendo. ¿Cómo es esto posible si en el noticiero de anoche dijo la presentadora que no llovería? Además, ¡no traje sombrilla!. Ahora me parece que debí haberla traido.

Lluvia o clima

En el juego de beisbol de anoche, el dirigente de los los Indios de Mayagüez trajo a Roberto Hernández a lanzarle a José González. Era la última entrada de un juego en la serie final, las bases estaban llenas y había dos outs. José González bateó por tercera base y el juego se acabó. Funcionó esta vez la estrategia del dirigente de Mayagüez, lo que le hace ganar el premio del mejor dirigente de la serie. ¿Fue buena la decisión del dirigente? ¿Qué hubiéramos dicho sobre la decisión si José González hubiera bateado un jonrón?

En otro juego de beisbol lanzaba Jaime Navarro por las Medias Blancas de Chicago contra los Orioles de Baltimore. Era la séptima entrada y el juego estaba 9 a 5 a favor de Chicago. Aún parecía tener dominio de sus lanzamientos. En esa entrada, luego de dos outs, los Orioles le llenaron las bases a Navarro. Venía a batear Eric Davis. ¿Debía el dirigente de Chicago cambiar a Jaime Navarro por otro lanzador más descansado? No lo hizo. En el próximo lanzamiento, Eric Davis bateó un jonrón, empatando el juego. ¿Fue una buena decisión del dirigente de Chicago?

FOTO DE José González bateando

Un gerente de banco decide aprobar un préstamo comercial a la compañía Facilitadores Inc. Después de un tiempo, la compañía fracasa y no puede pagar su préstamo. El gerente es despedido por haber tomado una mala decisión. ¿La decisión del gerente en aprobar el préstamo, era correcta? ¿Qué tal la decisión de sus superiores de despedirlo?

Cuando vamos del hogar a nuestro centro de estudios tenemos la posibilidad de tomar una de varias rutas alternas. Ese día estamos con prisa y tomamos la ruta que casi siempre es la más rápida. Pero al llegar allí, sin oportunidad ya de desviarnos, nos encontramos atrapados en un inmenso tapón. Había ocurrido un accidente. Ese día llegamos más tarde que nunca a clases. ¿Fué buena nuestra decisión?

Imagen de carreteras o mapa

Un día nos sentimos particularmente despreocupados y felices. Conocemos una persona en una discoteca y después de algunas bebidas, tenemos relaciones sexuales sin protección alguna. Muy asustados después recibimos los resultados de una prueba que nos hicimos y encontramos que no recibimos el Virus de Inmunodeficiencia Adquirida (VIH). Respiramos tranquilos entonces. La decisión de tener relaciones sexuales no tuvo mayores consecuencias esta vez. Sin embargo, ¿fue buena esa decisión? ¿y la de no usar protección?

Imagen de baile

Un legislador propone que se le adminstre pruebas para detectar el VIH a todas las persionas que viven en el país. Indica el senado que la prueba detecta el 99% de las personas infectadas y que si la persona no otiene el virus, la prueba da negativa en el 95% de los casos. ¿Es buena la idea de hacer esta prueba a todos? ¿Cuáles son sus consecuencias? ¿Cuántas personas en la población que no tienen el virus tomarán la prueba y tendrán un resultado positivo, como si lo tuvieran?

Imagen de músicos, concierto o música

Para sorprender a sus cuatro hijos, los padres usaron sus ahorros para comprar taquillas para todos al concierto de Fiel a la Vega, por su precio, sólo pudieron obtener dos taquillas. Con el fin de ser justos, los padres deciden rifar las dos taquillas entre los cuatro hijos. El padre dice que la forma mas justa es colocar papelitos con los cuatro nombres en una bolsita, sacudirla y sacar uno de los papelitos. Propone el padre que luego de que se le entregue la taquilla al hijo ganador, se sacude nuevamente la bolsita con los tres papelitos restantes y se saca el papelito con el nombre del siguiente ganador. La madre dice que esa forma no es justa, que lo mejor es colocar papelitos con los cuatro nombres en una bolsita, sacudirla y sacar dos papelitos a la vez. ¿Está la madre en lo correcto? ¿Es justo el método del padre?

Imagen de amigos o de loteria

Una noche soñamos con un compañero de escuela que no vemos hace mucho tiempo. Al día siguiente nos lo encontramos en el Centro Comercial Plaza del Caribe. ¿Era el sueño una premonición? o, ¿fue todo una casualidad? De la misma manera mi hermana soño con el número 425. El próximo viernes ese número resulta ser el ganador en el juego de Pega 3. ¿Es clarividente mi hermana? o, ¿es también casualidad?

En el juego de ruleta una persona está apostando al número 12. Ya ha perdido 23 veces consecutivas. En ese momento se retira del juego y en la próxima jugada ¡sale el 12! ¿Debió seguir jugando? ¿Hizo bien al retirarse? El que no hubiera salido el número 12 en veintitres ocasiones consecutivas, ¿era un indicador de que estaba próximo a salir?

Imagen de ruleta o mesa de juegos

Un jugador de beisbol, con promedio de bateo de .309 ha fallado en batear de hit en sus últimos 15 turnos al bate. Al escuchar el juego por la radio el comentarista dice que la ley de promedios dice que debe estar próximo a batear un hit. ¿es eso correcto? ¿cuán posible es que batee de hit en su próximo turno? ¿que batee por lo menos un hit en el juego?

Imagen de examen

A veces pensamos que podemos aprobar un exámen de selección múltiple si adivinamos todas sus contestaciones. ¿Es cierto esto? ¿Cuándo es beneficioso adivinar? ¿Qué puntuación esperaríamos obtener si adivinamos todas las respuestas en un exámen de con diez preguntas de selección múltiple con 4 alternativas cada una?

El Departamento de Educación necesita hacer un estudio para conocer el nivel de satisfacción sobre el programa de Vales Educativos que tiene la población de padres, maestros, estudiantes y administradores participantes. Como la población de participantes es muy grande es necesario estudiar una muestra representativa. la encuesta debe tener una confiabilidad del 95%. ¿Qué quiere decir representativa? ¿Qué quiere decir confiabilidad? ¿Es posible obtener una confiabilidad del 100%? ¿Cómo puede garantizarce que el proceso de selección de la muestra tenga altas posibilidades de producir una muestra representativa?

Nuestro mundo esta lleno de incertidumbre. ¿Lloverá mañana? ¿Cuántos niños nacerán durante el día de hoy? ¿Nos afectará el huracán que se encuentra a 150 millas de distancia al sur de Yabucoa? ¿Quién ganará las elecciones? ¿Ganaré el premio de la Lotería? ¿Resultará bien mi matrimonio? ¿Me llamarán por teléfono esta noche? ¿Debo estudiar en Río Piedras o en Mayagüez? ¿Qué ruta debo tomar esta tarde cuando regrese a mi casa? ¿Habrá tapón? ¿Aprobaré el examen si adivino las contestaciones? ¿Debo invertir en una cuenta de Retiro Individual? ¿A qué hora debo salir para el concierto?

Cada día se nos presentan situaciones o problemas que nos dejan con muchas interrogantes. Se nos presentan situaciones sobre las cuales debemos tomar alguna decisión sin conocer toda la realidad ni estar seguro de cual será el resultado. En muchos casos es posible cuantificar y controlar el nivel de incertidumbre asociado a una decisión. Esta es una de las razones por las cuales necesitamos estudiar Probabilidad.

Experimenta y resuelve
Selecciona una de las situaciones anteriores y menciona varios factores que debes considerar para tomar una decisión. Compara tu decisión con la de otro compañero. ¿Es la misma? ¿Quién está en lo correcto? ¿Es posible ser objetivo al tomar una decisión? ¿Qué criterios puedes usar para juzgar si una decisión está bien tomada?

Discutamos ahora algunas de las situaciones que vimos antes. Una de las formas que podemos usar para entender las situaciones es simulándola. La situación, o una simplificación de la misma se repite un número de veces y estudiamos el comportamiento de los resultados obtenidos.

Buenas decisiones. Una decisión bien tomada requiere que consideremos todos los aspectos del problema. Una forma de saber si una decisión está bien tomada es pensar que haríamos si esta situación se repitiera bajo las mismas condiciones, ¿volverías a tomar la misma decisión?

Hay que reconocer que una decisión bien tomada, que considera todos los datos disponibles, no siempre nos lleva al resultado deseado. De la misma manera, una decisión mal tomada no siempre provoca un resultado negativo. Los resultados que se pueden observar cuando se toman decisiones están asociados a un nivel de incertidumbre, que no podemos eliminar en la mayoría de los casos.

¿Aprobaremos el examen de selección múltiple?

Contestaciones	
1	a
2	d
3	c
4	d
5	b
6	b
7	d
8	c
9	a
10	a

Queremos ver si es fácil aprobar un examen de diez preguntas de selección múltiple si adivinamos todas las contestaciones. prueba de selección múltiple con 10 preguntas. Cada una de estas preguntas tiene cuatro alternativas de las cuales sólo una es correcta. Para aprobar este examen es necesario obtener siete o más contestaciones correctas. ¿Crees es posible aprobar el examen si adivinas todas las contestaciones.

Palo Observado	*Contestación*
Copa	a
Basto	b
Oro	c
Espada	d

Comenzamos con anotar los números que corresponden a la preguntas uno a la décima en una hoja de papel. Para seleccionar la contestación que colocaremos en cada pregunta podemos usar una paquete de barajas, ya sean españolas o de casino.

Despúes de mezclar bien las barajas, seleccionamos una. Si es del palo de Copa, decimos que la contestación es a. Si la baraja seleccionada es del palo del Basto, decimos que la contestación es b. Si es una carta del palo de Oro seleccionamos la contestación c, cuando vemos un carta de Espada la contestación es d. Luego de tener la contestación a una pregunta, devolvemos la carta al paquete y barajeamos las cartas de nuevo. Ahora seleccionamos otra carta para contestar la siguiente pregunta y repetimos el proceso hasta obtener las contestaciones a las diez preguntas.

Experimenta y resuelve. Encuentra otras maneras de simular esta situación. ¿Qué importancia tiene que devolvamos la carta al paquete? ¿Cambiaría en algo el resultado si no lo hacemos?¿Qué importancia tiene que devolvamos la carta al paquete? ¿Cambiaría en algo el resultado si no lo hacemos?

Con este procedimiento hemos contestado un examen. Pero para estudiar el comportamiento de los exámenes es necesario contar con un número mayor de ellos. Por eso hay que repetir este proceso digamos 20 o 25 veces, o más si tenemos el tiempo y paciencia.

Otra forma de simular los resultados.

Podemos hacer este experimento de simulación más entretenido y rápido si tomamos un grupo de estudiantes y le solicitamos que tomen la prueba. Con el fin de asegurar que se adivine cada contestación, los examinados nunca llegan a conocer las preguntas ni las alternativas. El instructor dice en voz alta "Pregunta 1" y los examinados anotan su contestación entre las alternativas a, b, c, d. Luego se continúa con la Pregunta 2 y así sucesivamente hasta llegar a la Pregunta 10. Al final, el instructor genera en forma aleatoria la clave de la prueba y la anota en la pizarra; los examinados corrigen sus resultados. ¿Cuántos habrán aprobado el examen?

Usa la calculadora

Otra manera en que esto se puede facilitar es generando números (seudo)aleatorios con la calculadora. Algunas calculadoras científicas tienen una función llamada **RND** que genera números (seudo)aleatorios desde el .000 hasta el .999. Así, en vez de usar las barajas generamos un número **n** con la calculadora y asignamos la constestación usando una tabla como la siguiente:

Intervalo para n	Contestación
.000 ≤ **n** ≤ .249	a
.250 ≤ **n** ≤ .499	b
.500 ≤ **n** ≤ .749	c
.750 ≤ **n** ≤ .999	d

Experimenta y resuelve.¿Funciona esta forma de asignar las constestaciones al examen? ¿Por qué? ¿Por qué se seleccionaron estos intervalos? ¿En qué se parece asignar la contestación usando estos intervalos a cuando usamos la baraja?

En un grupo de cuarenta estudiantes se observaron los siguientes resultados.

Número de correctas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de examinados	2	4	11	9	6	4	2	1	1	0	0

Experimenta y resuelve

¿Cuántas personas aprobaron el examen? ¿Corresponde el resultado a lo que esperabas? ¿Crees es posible aprobar un examen cuando lo contestas de esta manera? Si el número de alternativas en cada pregunta del examen fuera tres, ¿sería más fácil aprobarlo? ¿Y si fueran sólo dos alternativas? Para contestar esta pregunta puedes hacer una simulación similar a la anterior.

El estudio de la probabilidad nos facilita el entender mejor la realidad para así tomar una mejor decisión.

Por ejemplo, ahora sabemos que si adivinamos en un examen de selección múltiple, es posible pasarlo, pero es muy poco probable. Nuestra mejor decisión en este caso sería la de estudiar, prepararnos bien para la prueba porque sólo así nos aseguramos que la aprobamos.

Vamos al concierto

Veamos ahora el caso de la familia con cuatro hijos adolescentes: Ana, José, Diana y Juan. Para sorprender a sus hijos, los padres usaron sus ahorros para comprar taquillas para todos al concierto de Fiel a la Vega, por su precio, sólo pudieron obtener dos taquillas. Pero, ¡todos quieren ir!

Experimenta y resuelve
¿Cómo repartirías las dos taquillas entre los cuatro hermanos? ¿Es esa una forma justa de hacerlo? Explica.

Con el fin de ser justos, los padres deciden rifar las dos taquillas entre los cuatro hijos.
El padre dice que la forma mas justa es colocar papelitos con los cuatro nombres en una bolsita, sacudirla y sacar uno de los papelitos. Propone el padre que luego de que se le entregue la taquilla al hijo ganador, se sacude nuevamente la bolsita con los tres papelitos restantes y se saca el papelito con el nombre del siguiente ganador. La madre dice que esa forma no es justa, que lo mejor es colocar papelitos con los cuatro nombres en una bolsita, sacudirla y sacar dos papelitos a la vez. ¿Está la madre en lo correcto? ¿Es justo el método del padre?

Para estudiar el método del padre construimos un **árbol**. Este representa el proceso de enumerar todos los posibles resultados del experimento (donde el orden en que ganan los hijos las taquillas se refleja). El par ganador se obtiene al recorrer el camino desde el punto del hijo que gana con el primer papelito hasta el segundo ganador.

Según el padre:

	Posibles ganadores de las taquillas		
Primer papelito	**Segundo papelito**		**Par ganador**
		José	Ana, José
	Ana	Diana	Ana, Diana
		Juan	Ana, Juan
		Ana	José, Ana
	José	Diana	José, Diana
		Juan	José, Juan
		Ana	Diana, Ana
	Diana	José	Diana, José
		Juan	Diana, Juan
		Ana	Juan, Ana
	Juan	José	Juan, José
		Diana	Juan, Diana

Pregunta
¿Es justo el método del padre? ¿Qué quiere decir justo?
¿De cuántas maneras distintas puede Diana ganar una taquilla?
Ella preferiría ir al concierto con Juan. ¿Cuál es la probabilidad de que eso ocurra?
Ana no se lleva bien con José. La verdad es que preferiría ir con algún otro hermano. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos, José y Ana no sean los ganadores de taquillas?

¿Importa el orden en que los muchachos se ganan los premios (si es con en primer papelito o con el segundo?

2. Para estudiar ver el método de la madre miramos todos los posibles conjuntos de hijos que pueden resultar ganadores. Constestamos las mismas preguntas de arriba.

{Ana, José}, {Ana, Diana}, {Ana, Juan}, {José, Diana}, {José, Juan}, {Diana, Juan}

3. ¿En qué se parecen los métodos? ¿En qué se diferencian?
4. Ambos métodos se pueden simular (haciendo el experimento). !Y comparar los resultados!

OTRA SITUACION (Premoniciones y veces corridas de observar el 12

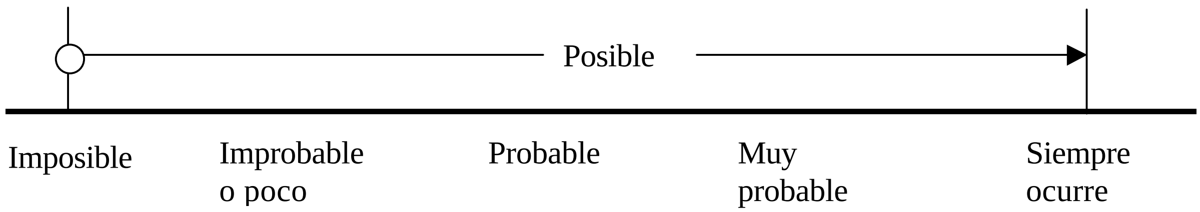
Experimenta y resuelve. Identifica eventos a tu alrededor en los que puedas predecir con certidumbre el resultado que ocurrirá. Menciona varias situaciones donde uses el término probabilidad. ¿Qué significa para ti?

A veces decimos “es probable que hoy llueva”. En otras ocasiones usamos frases tal como “es poco probable que yo pueda asistir a la fiesta de manaña” o es posible que pueda ganar el primer premio de la Lotto. ¿Son estas frases equivalentes? ¿Qué queremos decir con ellas? ¿Si un suceso es posible, es también probable? ¿Si un suceso es probable, ¿es también posible?

Es necesario utilicemos el lenguaje con un poco más de formalidad. De estas frases de uso cotidiano vemos que cuando decimos probabilidad nos referimos a la medida en que creemos que un evento o suceso particular ocurra. Así que si creemos que un evento ocurre casi siempre podemos decir “es muy probable que ocurra”. Si hablamos de un suceso que creemos, o en nuestra experiencia, ocurre pocas veces, podemos decir “ es poco probable que ocurra”. Cuando decimos es “probable hoy llueva” estamos expresando nuestra creencia de que hoy es muy posible que llueva, de seguro tomaríamos la sombrilla antes de salir de casa.

Hay muchos eventos que son posibles. Es posible un meteoro gigantesco choque mañana con el planeta Tierra. Es posible que ganes el premio mayor de la Lotto el viernes próximo. Es posible que todos los seres humanos vivamos en paz comenzando desde mañana. Es posible que obtengas una puntuación de 100% en el examen aún cuando no estudiaste. Todos estos eventos son posible, sin embargo son muy poco probable. En realidad no creemos que podamos observar cada uno de estos resultados con mucha frecuencia, aún si repitiéramos el experimento muchas veces.

Cuando hablamos de probabilidad realmente nos estamos refiriendo a una escala con la que comparamos cuánto creemos es la probabilidad de cualquier posible resultado de un experimento:



A veces observamos que posibles resultados, tal como el que llueva durante el día de hoy se le asigna probabilidades distintas por personas diferentes. Lo mismo ocurre con los inversionistas en el mercado de valores, con resultados en eventos deportivos o aún en resultados eleccionarios. Esta forma subjetiva de asignar la probabilidad depende de la información que posea la persona sobre los resultados del experimento. Es de las tres formas en que podemos interpretar, asignar o describir la probabilidad de algún resultado particular de un experimento. Más adelante veremos otras dos formas.

Interpretación de probabilidad
No hay una interpretación única aceptada por los científicos.

Frecuentista
Ejemplo

Monedas, dados, cartas, lluvia,

La probabilidad de que se observe algún resultado específico puede interpretarse como la frecuencia relativa con que se observaría dicho resultado si se repitiera el proceso muchas veces bajo las mismas condiciones.

Dificultades

Experimento se debe repetir un número grande de veces
¿Qué es un número grande?
La frecuencia relativa variará siempre, pero debe acercase a la probabilidad real ¿cuánto?.

Clásica
Ejemplo

Monedas, cartas, dados.

Se basa en el concepto de resultados equiprobables. Cuando se tira un dado hay seis posibles resultados: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si puede asumirse que cada resultado tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces deben tener la misma probabilidad: 1/6.

Dificultades

El concepto de resultados equiprobables es precisamente el concepto que queremos definir.
No hay un método sistemático para asignar probabilidades a resultados que no tiene la misma posibilidad de ocurrir.

Subjetiva

Ejemplo

¿Se estrellará el satélite al llegar a Marte?, ¿Ganaré dinero si invierto en IBM? ¿Tendrá éxito mi negocio? ¿Ganará la carrera el caballo al que aposté?

La probabilidad que un persona asigna a un posible resultado de un proceso representa su juicio personal de que se obtendrá el resultado deseado. Depende de las creencias e información que posea la persona.

Dificultades

El requisito de que el juicio de una persona de las posibilidades relativas de un número infinito de eventos esté libre de contradicciones y sea consistente no parece ser humanamente posible.

Esta interpretación no provee la base para que dos científicos que trabajan juntos lleguen a la misma conclusión.

Nota

Subjetivo no es sinónimo de arbitrario.

Resultados de un experimento

Para nosotros, un *experimento* es cualquier proceso por el cual observamos un resultado. Ejemplos de experimentos que siguen esta definición son los experimentos diseñados, tal como los que hace un científico en su laboratorio;el lanzar una moneda al aire y observar el resultado y el hacer una pregunta a una persona anotando la contestación. Cada vez que hacemos un experimento observamos uno de los posibles resultados que pudieron haber ocurrido.

Experimento. Veamos que ocurre cuando tiramos un dado de seis caras. ¿Qué resultados podríamos observar? Si nos fijamos en el número de puntos que se pueden observar en la cara superior del dado, es posible observar uno de seis resultados distintos: un punto, dos puntos, tres puntos, cuatro puntos, cinco puntos o seis puntos. Podemos hacer una lista de todos los resultados posibles y enumerarlos así: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Experimento. Supongamos que desde balcón en nuestro hogar observamos el cielo durante el día de hoy y nos fijamos si llueve o no. ¿Qué resultados son posibles? En este caso sólo observamos si llueve o no. Una vez bien definido lo que quiere decir lluvia, digamos que es cualquier precipitación de agua que caiga de una nube, los posibles resultados que observaremos es si llueve o no llueve. Así podemos hacer una lista de todos los posibles resultados: {llueve, no llueve}.

Experimento. En un salón de clases preguntamos el día y mes de nacimiento de cada estudiante.¿Qué posibles resultados podríamos observar? Aquí observaremos pares ordenados, tal como (1, enero), (27, marzo), (4, septiembre). El primer valor corresponde al día y el segundo al mes. ¿Podemos hacer una lista de todos los posibles resultados? Es posible hacerlo, aunque sería muy tedioso, pues aún si no contamos años bisiestos, la lista contendrá un total de 365 pares ordenados. De todas maneras, tendríamos una lista de todos los posibles resultados como la siguiente:
{ (1,enero), (2, enero), …(31, enero), (1 febrero), …, (28, febrero), …., (1, diciembre), …(31, diciembre) }

Experimento. El primero de noviembre discutimos sobre los posibles resultados de las elecciones generales en Puerto Rico. Los candidatos a gobernador son, David Noriega por el Partido Independentista, Juan J. Roselló por el Partido Nuevo Progresista y y Héctor Luis Acevedo por el Partido Popular Democrático. Una lista de los posibles resultados que observaremos es {David Noriega, Juan J. Roselló, Héctor Luis Acevedo}. Esta lista contiene sólo tres elementos y corresponden a aquellos candidatos que es posible ganen las elecciones. En este ejemplo vemos que algunos resultados son posibles, aunque no nos parezcan probables.

Figura de votación

Experimento. Un día se nos ocurre contar el número de estudiantes que asisten a la clase de matemáticas. En ese grupo hay un total de 35 estudiantes matriculados. Así que podemos observar desde cero hasta treinticinco estudiantes. En este caso, la lista del número de estudiantes que es posible observar es {0, 1, 2, 3, …, 34, 35}.

Experimento. Una mañana nos detenemos en una intersección y contamos el número de vehículos que pasa frente a nosotros. Aquí podemos observar desde cero vehículos hasta un número no determinado de ellos. Como no podemos conocer con certidumbre el número máximo de vehículos que pueden pasar por la intersección, no podemos dar un número tal que la cantidad de vehículos que pasan por allí sea menor que ese número. Así que al hacer la lista de posibles resultados tenemos que decir que es posible observar {0,1 2, 3, … } vehículos.

Gráfica de automóviles

Experimento. Observamos la cantidad de tiempo que toma desde el momento en que llegamos a la parada del autobús hasta que llega el que debemos tomar. Si el autobús estaba en la parada justo cuando llegamos, entonces no debemos esperar tiempo alguno. Sin embargo, nunca sabemos cual será el tiempo máximo que debemos esperar, así que si hablamos de todas las posibilidades, debemos decir que el tiempo que debemos esperar es un número **t** mayor o igual a cero. Denotamos estos posibles resultados de la siguiente manera: $\{t \,;\, t \geq 0\}$.

Experimenta y resuelve. Escribe todos los posibles resultados de los siguientes experimentos:

1. Tira un centavo al aire. Observa el resultado obtenido.
2. Tira dos dados al aire, uno rojo y uno verde. Observa la suma de los puntos obtenidos en las caras superiores de los dados.
3. Observa el género de los niños nacidos en algún hospital.
4. Observa el número de hojas de un árbol.
5. Observa el número de hermanos que tienen tus compañeros de clase.
6. Observa el tiempo que tarda cada persona en llegar de su casa al trabajo.
7. Observa la puntuación que obtienen tus compañeros en el próximo examen.
8. Observa la distancia que tiene que recorrer tus compañeros dede su casa al salón de clases.
9. Observa la velocidad de los automóviles que pasan por una intersección.
10. Observa el número de llamadas telefónicas que recibe una estación de radio durante una hora.
11. Observa el tiempo que dedicas a ver televisión durante un día.
12. Observa el número de pacientes que se recuperan del dolor cuando toman aspirina.
13. Observa el número de transistores defectuosos de un total de 1,000 producidos.
14. Observa la temperatura del aire al mediodía por 100 días consecutivos
15. Observa si un proyecto es exitoso
16. Observa el peso de una cantidad de hierro

Teoría de conjuntos

Es más fácil hablar sobre todos los posibles resultados de un experimento si usamos un nombre y notación común para hacerlo. Primero vemos que estos posibles resultados forman una colección de números o cosas (vivas o no). Una colección de objetos se llama ***conjunto***. Cada conjunto cuenta con una regla que nos sirve para definir claramente quienes pertenecen al conjunto. Esos objetos que pertenecen al conjunto se llaman ***miembros*** o ***elementos*** del conjunto.

Es usual escribir “el conjunto de todos los posibles resultados al lanzar un dado al aire” como **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. El nombre que le dimos al conjunto es **S.** Usualmente usamos una letra mayúscula para darle nombre al conjunto. Luego se enumeran los miembros del conjunto **S** dentro de dos símbolos: **}**, **{** que se llaman llaves. Esta notación nos permite determinar fácilmente si un elemento pertenece a **S** o no. Si queremos saber si un número tal como **9**, es miembro de **S** o no, sólo tenemos que compararlo con la lista de los miembros de **S**. Como **9** no está en la lista, entonces no es miembro de **S**.

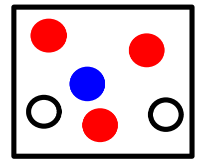
Experimenta y resuelve. Escribe todos los resultados que encontraste en la situación anterior usando la notación de conjuntos. Indica claramente la regla que usas para determinar si un resultado o elemento pertenece al conjunto.

En muchas ocasiones es imposible enumerar todos los miembros de un conjunto. En ese caso se indica la regla que se usará para determinar si un objeto es miembro o no de ese conjunto. Por ejemplo, si hablamos del conjunto de todos los números naturales podemos decir **T** = **{** n **;** n es un entero positivo**}**. Esta descripción se lee “**T** es el conjunto de todas los números n tal que n es un entero positivo”. El símbolo **;** dentro de las llaves se lee “tal que”. Para decidir si un número es miembro de **T**, vemos si cumple con la regla: es un entero positivo. Así n= -1 no es miembro de **T** y n = 1,945 es lo es.

Experimenta y resuelve. Escribe los siguientes conjuntos en el formato { n; regla}
1. {2, 4, 6, 8, 10}
2. {todos los números reales entre 0 y 3 inclusive}

Ejemplo

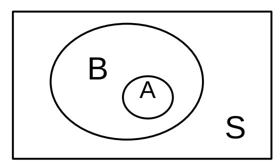
Considera una caja con seis canicas. Dos de las canicas son blancas, tres son rojas y la restante es azul. Para cada una de las siguientes formas de seleccionar canicas, representa el experimento usando un árbol y enumera el conjunto de todos los resultados posibles.



1. Selecciona una canica al azar y anota su color.
2. Selecciona una canica al azar y anota su color. Devuélvela a la caja y selecciona otra canica. (muestreo con reemplazo)
3. Selecciona una canica al azar y anota su color. No la devuelvas a la caja y selecciona otra canica. (muestreo sin reemplazo)

Cuando hablamos del conjunto de todos los posibles resultados de un experimento nos estamos refiriendo al ***espacio muestral*** del experimento, Este último conjunto tiene diversos nombres dependiendo de la materia que estudiemos. En matemáticas es usual llamar al conjunto de todos los posibles resultados como el conjunto Universo. En la Estadística conocemos a ese conjunto como la población. Sin embargo, en el área de probabilidad se le llama Este último será el nombre que usaremos de ahora en adelante.

Un conjunto A está contenido en el conjunto B, denotado por $A \subseteq B$ si todo elemento que está en A también está en B. Decimos que A es **subconjunto** de B.

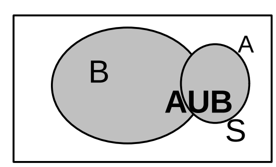


Ejemplo

Tiramos un dado de seis caras, el espacio ,muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Nos interesa que evento de que el resultado sea par: {2, 4, 6}. Observamos el evento simple {4}. El evento que nos interesaba ocurrió.

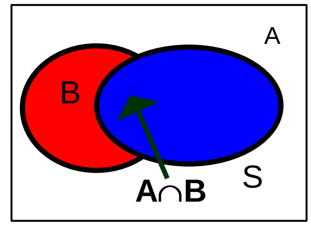
Cuando efectuamos un experimento y decimos que un evento ocurrió, el resultado observado cumple con unas características que definen el evento. El evento de que el resultado es par ocurrió. Así, un **evento ocurre** cuando observamos cualquier resultado contenido en ese evento. Vemos que un **evento** es un subconjunto del espacio muestral.

El espacio muestral S es un evento que siempre ocurre. Algunos eventos son imposibles, tal como observar 1.5 cuando tiramos un dado. Este evento no contiene resultados de S, por lo cual es vacío, denotado por { } ó por ϕ.



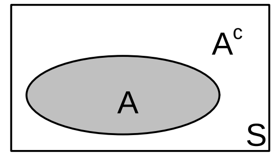
La unión de dos eventos, denotado por **A U B;** A unión B; A ó B es el evento que contiene todos los resultados contenidos en A,
además de todos los resultados contenidos en B. Ocurre cuando uno de los eventos A, B o ambos eventos ocurren.

La intersección de dos eventos A, B, se denota por $\mathbf{A \cap B}$; A y B; AB. Es el evento que contiene todos los resultados que contenidos en ambos eventos A y B a la vez. Ocurre cuando ambos eventos A, B ocurren.



$\mathbf{A^c}$ es el evento que ocurre cuando el evento A NO ocurre. A^c es el complemento del evento A.

Si $A \cap B = \phi$, decimos que los eventos son disyuntos o **mutuamente excluyentes**. Por ejemplo, un evento A y su complemento son siempre mutuamente excluyentes, no pueden ocurrir a la vez.

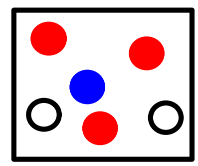


Ejemplos

1. Suponga que un número x se seleccionará de la línea real S. Sean
$A = \{ x : 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{ x : 3 < x \leq 7\}$, $C = \{ x : x \leq 0\}$ Describe los siguientes eventos:

a. A^c b. A U B c. BC^c d. $A^cB^cC^c$

2. Considera la caja con seis canicas del ejemplo anterior y formas en que las seleccionamos de la caja:



a. Selecciona una canica al azar y anota su color. Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que la canica seleccionada:
   i. sea roja.
   ii. sea blanca.
   iii. no sea roja
   iv. sea azul o roja
   v. sea roja y azul.

b. Selecciona una canica al azar y anota su color. Devuélvela a la caja y selecciona otra canica. (muestreo con reemplazo). Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que:
   i. ambas canicas seleccionadas sean azules.
   ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
   iii. ninguna canica sea blanca.
   iv. la segunda canica sea blanca si la primera fue azul.
   v. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
   vi. la segunda canica es roja.

c. Selecciona una canica al azar y anota su color. No la devuelvas a la caja y selecciona otra canica. (muestreo sin reemplazo)
   i. ambas canicas seleccionadas sean azules.
   ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
   iii. ninguna canica sea blanca.
   iv. la segunda canica sea blanca si la primera fue azul.
   v. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
   vi. la segunda canica es roja.