Probabilidad condicional

Generalmente hablando, la probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B, denotada P(A|B) es la probabilidad de que el evento A ocurra cuando sabemos que el evento B ocurrió. Esta es la razón por la cual se llama condicional a esta probabilidad. La probabilidad de que el evento A ocurra está condicionada por la ocurrencia de B. Este información adicional sobre A se incluye en el cómputo de su probabilidad condicional cuando analizamos los resultados posibles que se pueden observar cuando sabemos que B ha ocurrido.

Probabilidad condicional como la razón de dos áreas

En algún punto de nuestras vidas, hemos jugado tirando dardos a un tablero. Supongamos que tenemos un tablero como el de al lado y tiramos un dardo. Usualmente, mientras más cerca del centro aterrice el dardo más puntos anotamos. Si sabemos que el dardo aterrizó en A, ¿cuán probable es que haya aterrizado en B?

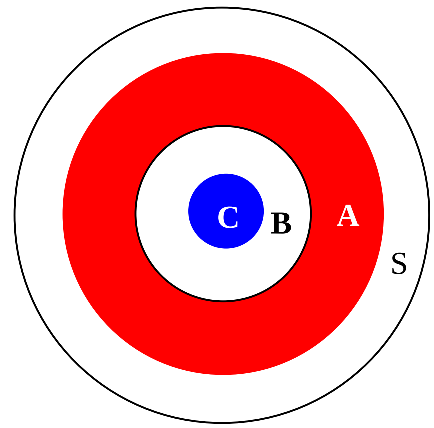


Figura 1. Tablero de dardos

Por simplicidad, supondremos que tenemos muy buena puntería y que el dardo siempre cae en el tablero S. Esto significa que la probabilidad de que el dardo aterrice en el tablero es 1. Suponemos además, que S, A, B, C se refieren a los discos completos y no tan sólo a la franja. Así S es un

disco que contiene al disco A, el que a su vez incluye el disco B. Este último incluye el disco C.

Podemos relacionar la probabilidad de que un dardo aterrice en cualquier región directamente al área de la región. Les asignaremos probabilidades a las varias regiones en la tabla tomando la razón del área de la región al área del tablero. Esta asignación es razonable, ya que mientras más grande es la región, más probable debe ser que el dardo aterrice allí. Estamos considerando el área del tablero S como una unidad contra la cual comparar las otras áreas, además, si comparamos el área de S consigo misma obtendremos una razón de 1, por esto es razonable decir que el área de S es igual a su probabilidad, 1. Con esta suposición, el área de cada disco es igual a la probabilidad de que el dardo caiga en el disco.

Denotaremos el evento que el dardo aterrice en la región S, A, B o C por el nombre de la región. Supongamos que la razón del área de región A a S es 1/2, de la región B a S es 1/10 y de la región C a S es 1/60. Según la asignación de probabilidad que hicimos, tenemos que P(A) = 1/2, P (B) = 1/10, P (C) = 1/60 y P (S) = 1.

Ahora hacemos el siguiente experimento: igual que con el juego de colocar la cola al burro, nos vendamos los ojos y lanzamos el dardo. Un juez nos dice que aterrizó en la región A. Entonces preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que haya aterrizado en B? Si no hacemos uso del hecho de que el dardo aterrizó en A, contestaremos la probabilidad buscada es 1/10. Pero sabemos que el dardo aterrizó en A, que B está contenido totalmente en A y que el área de B es una quinta parte del área de A, entonces la respuesta correcta es 1/5, estableciendo que P(B|A) = (1/10)÷(1/2) = 1/5.

Esta expresión se justifica con el siguiente argumento. Como sabemos que el dardo ha aterrizado en A, el área de A ahora llega a ser una nueva unidad contra la cual medir otras áreas, esto explica el denominador. El numerador corresponde al área en común de las regiones A y B. Dado el hecho que el dardo aterrizó en A, la única manera en que el dardo puede aterrizar también en la región B es que haya aterrizado en ambas regiones. Ahora la región B está contenida en la región A, por lo cual $A \cap B$= B y $P(A \cap B) = P(B)$.

Pregunta
¿Cuál es la probabilidad que el dardo haya aterrizado en A si sabemos que aterrizó en B?

Como sabemos que B está contenido totalmente en A, vemos que si el dardo aterriza en B entonces tiene que haber aterrizado en A. Siguiendo este razonamiento tenemos:

P (A|B)= (área de A también en B)/ (área de B)= (área de B)/ (área de B)= 1.

Pregunta
Si el dardo aterrizó fuera de B, ¿cuál es la probabilidad que haya aterrizado en C?

Un tablero general de dardos

El tablero de la derecha nos presenta una situación más general. En este caso ninguna región (excepto S) contiene totalmente cualquier otra región, pero los argumentos todavía son válidos. Supongamos que las áreas de S, A, B y C son como antes. Supongamos ahora que el área en la intersección de las regiones A y B es 1/ 30. Todavía podemos preguntar las mismas preguntas.

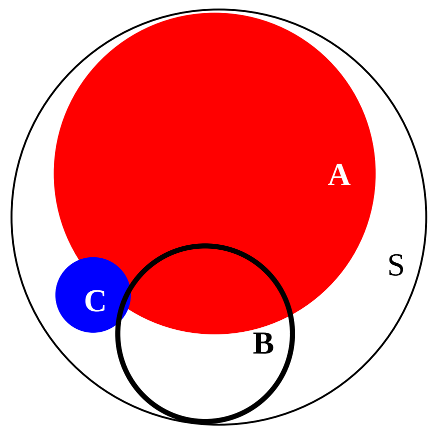


Figura 2. Tablero general de dardos

Para calcular P (B|A) debemos darnos cuenta de que B tiene un pedazo pequeño en común con la región A. Este pedazo tiene área igual a 1/ 30. Si sabemos que el dardo aterrizó en A, para que haya caido en B, debe haber aterrizado en esta pequeña región en común. La región A es nuestra unidad de comparación. Comparamos el área en la intersección de A y B con el área de A para obtener nuestra contestación. Así P (B|A) es igual a la proporción
$(1/30) \div (1/2) = 1/15$. Este resultado se puede interpretar como el número de veces que la región en común entre A y B cabe en la región A.

La respuesta a P (A|B) no es tan fácil de hallar como antes. Sabemos ahora que el dardo aterriza en la región B. Debemos hallar la proporción del área de la intersección de A y B al área de B. Ahora la región B es nuestra unidad y así P (A|B) es igual a $(1/30) \div (1/10) = 1/3$.

Un ejercicio fácil de resolver es hallar P (A|C). Como A y C son disyuntos, si el dardo aterrizó en C sabemos que es imposible que haya aterrizado también en A, por esta razón la probabilidad buscada debe ser cero.

Una representación relacionada

Otra forma de representar la probabilidad condicional se puede ver en el siguiente ejemplo. Supongamos que tomamos una muestra al azar de 100 estudiantes y obtenemos los siguientes resultados:

15 mujeres reciben ayuda económica y trabajan
45 mujeres reciben ayuda económica
20 mujeres trabajan
55 de los estudiantes son mujeres
25 estudiantes reciben ayuda económica y trabajan
60 estudiantes reciben ayuda económica
40 estudiantes trabajan

Se puede traducir estos datos en proporciones o porcentajes y representar en un diagrama de Venn tal como a la derecha. El conjunto W representa todas las mujeres en la muestra, F el conjunto representa los estudiantes que reciben ayuda económica y J el conjunto de estudiantes en la muestra que trabajan.

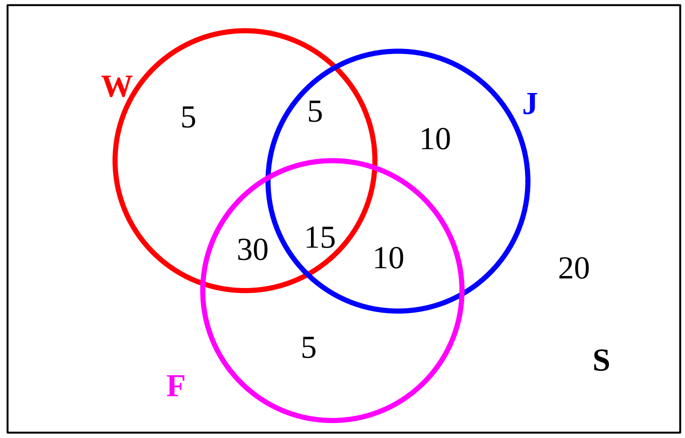


Figura 3. Diagrama de Venn representando el resultado de una encuesta a 100 estudiantes

Nos proponemos seleccionar al azar una persona de estos 100 estudiantes en la muestra. Entonces podemos hablar acerca de la probabilidad que la persona seleccionada es una mujer, por ejemplo. Sin temor a confundirnos, usaremos los nombres F, J y W para denotar el evento que la persona seleccionada recibe ayuda económica, trabaja o es una mujer, respectivamente.

Entonces P (W)= .30 + .05 + .05 + .15 = .55, por ejemplo. De este diagrama de Venn podemos contestar rápidamente muchas preguntas que a primera vista parecen ser muy complicados, tal como, ¿qué proporción de estudiantes son mujeres que no trabajan y reciben ayuda económica? Esta pregunta es equivalente a encontrar P (W y F y no J). La solución, .30 se encuentra en la intersección de los tres conjuntos W, no J, F.

La probabilidad condicional se ve en situaciones donde queremos saber, por ejemplo, qué proporción de estudiantes que trabajan son mujeres. Esto es equivalente a encontrar P (W | J). La proporción de estudiantes que trabajan es .40, la proporción de mujeres que trabajan es .20. De esta manera la proporción de mujeres de entre todos los estudiantes que trabajan, es .20/ .40= .50, es decir, la mitad de los estudiantes que trabajan son mujeres. Igual a las ideas desarrolladas previamente podemos escribir la solución como P (W | J) = P (W y J)/ P (J) = .20/ .40 = .50.

El diagrama de Venn que representa los resultados obtenidos en la encuesta parece también un tablero de dardos. La probabilidad de que el dardo caiga en cualquiera de esas regiones está dada por la proporción de estudiantes representados en esa región.

Probabilidad condicional y el conteo de resultados

Lanzamos dos dados balanceados, uno rojo y el otro verde. El espacio muestral de este experimento consta de 36 pares ordenados tal como en la tabla más abajo.

Dejemos que R y G denoten el valor observado en la cara del dado rojo y en el dado verde, respectivamente y X la suma de los valores observados, es decir, X = R + G. Si suponemos que los dados están balanceados, entonces los 36 resultados distintos del experimento son igualmente probables. Por la forma como se lleva a cabo el experimento, vemos que el valor observado en un dado no está relacionado con el valor en el otro dado, es decir. el valor obtenido en un dado es independiente del obtenido en el otro. De estas suposiciones tenemos que P (R = r) = P (G = g) = 1/ 6 y que
P (R= r, G= g)= 1/ 36 para r, g= 1,2, ..., 6.

En esta situación muchas preguntas acerca de la probabilidad de eventos particulares se pueden reducir a contar el número de elementos en el conjunto apropiado.

		Dado Verde					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado Rojo	**1**	**1, 1**	**1, 2**	**1, 3**	**1, 4**	**1, 5**	**1, 6**
	2	**2, 1**	**2, 2**	**2, 3**	**2, 4**	**2, 5**	**2, 6**
	3	**3, 1**	**3, 2**	**3, 3**	**3, 4**	**3, 5**	**3, 6**
	4	**4, 1**	**4, 2**	**4, 3**	**4, 4**	**4, 5**	**4, 6**
	5	**5, 1**	**5, 2**	**5, 3**	**5, 4**	**5, 5**	**5, 6**
	6	**6, 1**	**6, 2**	**6, 3**	**6, 4**	**6, 5**	**6, 6**

Tabla 1. Espacio muestral de los resultados al tirar dos dados

Pregunta

Encontremos la probabilidad que el número de puntos en el dado rojo es menor o igual a 3: P(R £ 3).

Para encontrar esta probabilidad debemos contar el número de pares en la tabla para los cuales R ≤ 3. Vemos que hay 18 de estos pares de un total de 36 pares posibles así obtenemos P (R ≤ 3)= 18/ 36= 1/2.

Pregunta

¿Cuál es la probabilidad que la suma X de los valores observados en los dos dados es menor de 6, es decir, P (X< 6)?

El número de pares donde observamos esta situación es 10, de un total de 36 pares posibles, por eso debemos tener P(X < 6) = P (X ≤ 5)= 10/ 36.

Supongamos estás en tu casa y un amigo te invita a jugar un juego donde se lanzan dos dados, tal como Parchís. A ti te interesa que la suma de los puntos en los dados sea 9. Tiras los dados, pero no miras el resultado. Tu amigo te dice que la suma de los dados es mayor de 7. ¿Te dice algo este dato? ¿Cuáles son ahora tus oportunidades de haber obtenido 9? Si hubiera dicho que la suma era menor de siete sabrías de seguro que perdiste.

Necesitamos calcular P (X= 9 | X> 7). Antes de tirar los dados, sabías que la probabilidad de ganar, P(X=9) era igual a 4/ 36. ¿Cambió esto? En la Tabla 2 están senalados todos los pares donde X > 7 y los pares donde X = 9.

		Dado Verde					
		1	2	3	4	5	6
Dado Rojo	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
	5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
	6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Tabla 2. Regiones donde X > 7 y X = 9

Como sabemos que X > 7 el resultado observado debe estar dentro del triángulo azul. Allí hay 15 pares distintos de los cuales cuatro son consistentes con X= 9, por esto P (X = 9| X> 7)= 4/ 15, esto significa que tus oportunidades de haber ganado han aumentado.

El resultado se puede obtener de la siguiente forma. La proporción de pares donde X > 7 es 15/ 36. La proporción de pares donde X > 7 y X = 9 es 4/ 36, siguiendo las ideas anteriores tenemos que P (X = 9| X > 7) = (4/36) ÷ (15/ 36) = 4/ 15. Igual que antes esta representación se asemeja a un tablero de dardos y el resultado se obtiene al comparar el "área" de la región que representa X = 9 con el "área" de la región que representa X > 9. De igual manera, también se asemeja a un diagrama de Venn.

Considera la probabilidad de que en el dado Rojo se observe un tres si sabemos que la suma de los dados es 5, es decir, P (R = 3 | X= 5). De la Tabla 1 se puede ver que P (X = 5)= 4/ 36, P (R = 3)= 6/ 36 y P(X = 5 y R = 3) = 1/36. La suma X es igual a cinco sólo cuando se observa uno de los cuatro pares: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1). De esos, sólo uno es compatible con que el dado rojo sea igual a 3, por esta razón, P (R = 3| X= 5)= 1/ 4. Este resultado implica que el evento {R = 3} afecta la probabilidad de que el evento {X = 5} ocurra. Antes de hacer el experimento, la probabiliadd de observar {R=3} es 1/6, pero ahora sabemos que {X=5} ocurrió y por lo tanto la probabilidad de observar {R=3} es ahora 1/4.

Pregunta
¿Qué hubiera pasado si el evento que condiciona hubiera sido X= 7?

De la tabla se puede ver que P (R = 3 | X = 7) = 1/6 = P (R = 3). Es decir, el saber que {X=7} ocurrió no nos ofrece información alguna sobre la porbabilidad de que {R=3} ocurra.

Probabilidad condicional y árboles

Otra manera natural y útil de estudiar probabilidad condicional es por medio de una estructura de árbol. Esta forma de visualizar el experimento es particularmente pertinente cuando éste se ejecuta en etapas. Toma por ejemplo el experimento de seleccionar a la vez dos canicas al azar de una caja que contiene 2 rojas y 3 azules. Este experimento es equivalente al de seleccionar al azar una canica, y entonces, sin reemplazar la primera, seleccionar al azar otra canica. Este proceso se puede visualizar fácilmente por medio de un árbol.

En cada nodo del árbol representamos el número de canicas rojas y azules que quedan en la caja. Las ramas que emanan de cada nodo representan los dos resultados posibles que se pueden obtener cuando se selecciona una canica al azar: rojo o azul. Cada rama es rotulada por el resultado obtenido y por la probabilidad condicional de observar ese resultado. Los nodos al final representan los estados finales posibles que podemos obtener como resultado del experimento. Estos nodos finales se llaman hojas.

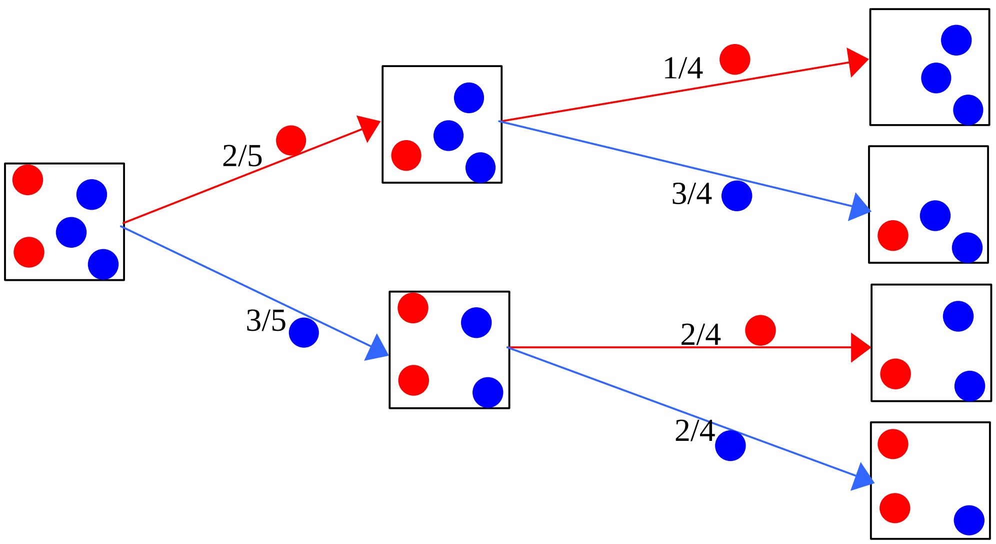


Figura 4. Diagrama de árbol que ilustra el experimento de seleccionar dos canicas de una caja

Pregunta

¿Cuál es la probabilidad que la segunda canica seleccionada sea roja dado que la primera es azul?

Si la primera canica fue azul, ahora quedan en la caja dos canicas rojas y dos azules. De ahí seleccionamos otra canica. La probabilidad de que una canica seleccionada de esa caja sea roja es 2/4.

Para facilitar el trabajo denotamos el evento de que la primera canica seleccionada es roja por R_1 y el evento de que la segunda sea roja por R_2. Hacemos lo propio para las canicas azules. Esta representación es útil para encontrar probabilidades conjuntas y marginales.

Por ejemplo, la probabilidad que la primera canica sea roja y la segunda azul, denotada P (R_1 y B_2) es el producto de las probabilidades que rotulan el camino de la raíz del árbol y que son consistentes con los resultados R_1 y B_2. Entonces P (R_1 y B_2) = 2/5 x 3/4 = 6/20.

Si nos interesamos por la probabilidad marginal de que la segunda canica sea roja, P(R_2), tenemos que darnos cuenta de que hay dos caminos posibles en que la segunda canica es roja. Estos dos caminos dependen del resultado que se observó cuando seleccionamos la primera canica, que pudo haber sido

rojo o azul. Así observamos una canica roja en la segunda selección cuando cualquiera de los dos eventos conjuntos (B_1 y R_2) ó (R_1 y R_2) ocurren. Estos son eventos son disyuntos por lo cual
$P(R_2) = P(B_1 \text{ y } R_2) + P(R_1 \text{ y } R_2) = 6/20 + 2/20 = 8/20$.

Los árboles son especialmente útiles para encontrar probabilidades condicionales tal como $P(R_1 | B_2)$. Esta probabilidad se puede entender si pensamos en un experimento donde escogemos una canica al azar, sin mirarla, la escondemos y luego seleccionamos al azar otra canica. Si la segunda canica seleccionada es azul, ¿cuál es la probabilidad que la canica que escogimos primero era roja?

Una forma de contestar esta pregunta es usando la Regla de Bayes, que aún no hemos estudiado. Otra forma es la siguiente. Imaginemos que antes de comenzar el experimento quitamos una canica azul. Esa será la canica azul que escogeremos como segunda selección, la hemos reservado de antemano. Ahora, en esta caja imaginaria hay 2 canicas rojas y 2 azules, por esta razón la probabilidad $P(R_1 | B_2)$ debe ser igual a (número de canicas rojas) / (número total de canicas) = 2/4.

Probabilidad condicional y tablas de contingencia

Los resultados electorales de 1988 para el Senado y Cámara de Representantes en Puerto Rico fueron publicados rápidamente por El Nuevo Día. La composición preliminar del Senado y la Cámara de Representantes por partido:

	Partido Popular Democrático	*Partido Nuevo Progresista*	*Partido Independentista Puertorriqueño*	*Total*
Senado	18	8	1	27
Cámara de Representantes	36	14	1	51
Total	54	22	2	78

Tabla 3. Desglose preliminar de la composición de los cuerpos legislativos de Puerto Rico luego de las elecciones de 1988. El Nuevo Día, 12 de noviembre de 1988.

Escogeremos al azar un miembro de cualquiera de los dos cuerpos representativos. Ya que hay un total de 78 legisladores, la probabilidad de escoger cualquier miembro particular es 1/ 78. de manera similar, se puede calcular la probabilidad marginal que un miembro seleccionado al azar pertenece al PIP, por ejemplo, comparando el número total de legisladores de ese partido por el toal de legisladores, es decir, dividimos la suma de la columna apropiada por 78. Así la probabilidad de que un legislador cualquiera, seleccionado al azar de entre estos 78 sea miembro del PIP es 2/78.

Igualmente la probabilidad marginal que una persona seleccionada al azar sea miembro de un cuerpo particular se puede hallar dividiendo la suma de la fila apropiada por 78. Tenemos entonces la distribución marginal de los partidos, P(PPD)= 54/ 78, P(PNP)= 22/ 78, P(PIP)= 2/ 78. La distribución marginal de los cuerpos legislativos, se obtiene con un argumento similar: P(Senado)= 27/ 78, P(Cámara de Representante) = 51/ 78. Estas probabilidades se llaman marginales, ya que para calcularlas examinamos los márgenes de la tabla.

Las probabilidades conjuntas se encuentran dividiendo el número en la celda apropiada en la tabla por 78. Así, por ejemplo, tenemos las siguientes probabilidades conjuntas: P (Senado y PNP)= 18/ 78, P(Cámara de Representante y PPD)= 36/ 78 y así sucesivamente. En esta forma de representar los datos es más fácil encontrar probabilidades conjuntas que en otras representaciones tal como el árbol.

Podemos ver que esta representación también se asemeja a la de un tablero de dardos o a la de un diagrama de Venn.

Frecuentemente tenemos que contestar preguntas tal como, de esos miembros del Senado, ¿qué proporción son miembros del PNP? Contestar esta pregunta requiere que miremos la fila correspondiente al Senado que se compone de 27 legisladores. De esos, 8 son miembros del PNP. Casi sin darnos cuenta, hemos usado los conceptos de probabilidad condicional.

Pregunta

Si seleccionamos un legislador al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un miembro del Senado si sabemos que es miembro del PNP?

Cuando usamos una tabla de contingencia tal como esta, los eventos que condicionan nos limitan a una fila o columna particular. Muchos de nosotros hemos hecho este cómputo automáticamente en ocasiones anteriores, sin embargo muy posiblemente, no nos habíamos dado cuenta de la relación que tiene con los conceptos de probabilidad condicional.

La idea de probabilidad condicional se puede usar de una forma muy natural para examianr situaciones como las presentan en muchas ocasiones los medios noticiosos. Por ejemplo, en una encuesta efectuada en el 1989 se entrevistó a 1,005 adultos y a 500 adolescentes. Se les hizo la siguiente pregunta: ¿Cuál es el problema principal de los Estados Unidos? Los resultados fueron como sigue:

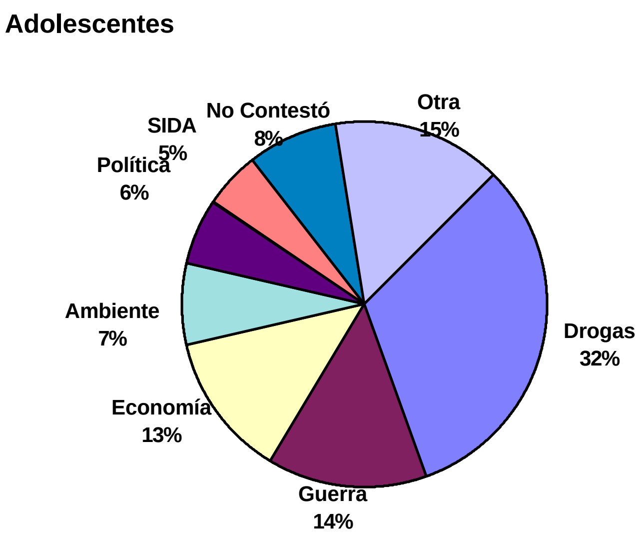


Figura 5. Por ciento de adolescentes que identificó el problema principal de los Estados Unidos

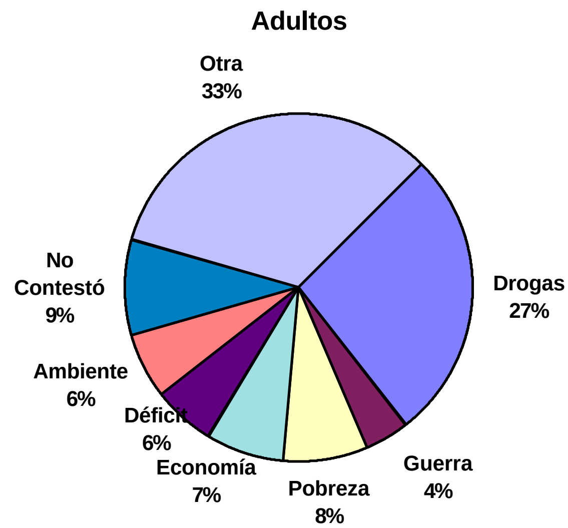


Figura 6. Por ciento de adultos que identificó el problema principal de los Estados Unidos

Pregunta

Supongamos que una persona de las que participó en la encuesta es seleccionada al azar. Encuentra la probabilidad de que:

1. la persona seleccionada es un adolescente.

2. un adolescente contestara {ambiente y política}.

3. un adulto contestara { SIDA}.

4. un adulto contestara {drogas ó economía ó guerra}.

1. la persona dijo que el problema principal es (el abuso de) Drogas.

¿Podemos concluir que los adolescentes y adultos tienen preocupaciones similares?

Probabilidad condicional en general

Estos ejemplos motivan la definición matemática de probabilidad condicional de que un evento A ocurra cuando sabemos que el evento B ocurrió como: $P(A|B) = \dfrac{P(A\, y\, B)}{P(B)} \quad cuando\; P(B) > 0.$

Pregunta

Verifica que la medida P(• | B) satisface los axiomas de probabilida, es decir, si B es un evento fijo en el espacio muestral S, entonces P(• | B) es una medida de probabilidad.

Con la representación del árbol vimos como obtener la probabilidad conjunta de dos eventos A, B. Por ejemplo, vimos que para obtener la probabilidad de que la primera canica fuera roja y la segunda fuera azul, $P(R_1 \text{ y } B_2)$ multiplicamos $P(B_2 | R_1)$ por la cantidad $P(R_1)$ a lo largo de las ramas apropiadas del árbol. Esta operación se justifica ahora por nuestra definición de probabilidad condicional. Si A, B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S, tenemos la regla de multiplicación.

Teorema 1 (Regla de multiplicación)

Si A , B son dos eventos cualquiera en un espacio muestral S donde P(B) > 0, tenemos
P(A y B) = P(A | B) P(B).

Prueba

Usa la definición de probabilidad condicional.

Ejemplo 1

Tienes los cuatro ases de la baraja en tus manos {A♣ , A♠ , A♦ , A♥ }. Sabemos que dos de esas barajas son rojas y las otras dos son de color negro. Sin mirar, un amigo selecciona una baraja primero y luego de las restantes tres selecciona una segunda baraja. Queremos encontrar la probabilidad del evento que ambas barajas seleccionadas sean rojas, { A♦ , A♥ }. La única forma en que ambas barajas serán rojas es que la primera sea roja y dado que la primera fue roja, la segunda debe ser roja también. La probabilidad de que la primera sea roja es 2/4. Si la primera fue roja, la probabilidad de que la segunda sea roja es entonces 1/3. Por lo tanto P(ambas barajas son rojas)=2/4 × 1/3 = 2/12.

Pregunta

Enumera el espacio muestral de este experimento. ¿Cuál representación sería más útil? Expresa el problema del Ejemplo 1 en forma de símbolos, usando la regla de multiplicación.

Ejemplo 2

El almacén de una escuela recibe 100 togas para su graduación de cuarto año. El fabricante había llamado a la escuela para anticiparle que entre esas 100 togas hay 10 que son de un tamaño equivocado, muy pequeñas para estudiantes de escuela superior. Seleccionamos dos togas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean muy pequeñas?

Seguimos el mismo argumento de arriba para resolver este ejercicio. La probabilidad de que la primera seleccionada sea muy pequeña es 10/100. Una vez seleccionada la primera toga pequeña, seleccionamos la siguiente toga de las restantes 99, de las cuales ahora 9 son muy pequeñas. Así, la probabilidad de que ambas sean muy pequeñas es $10/100 \times 9/99$.

¿Qué tal si seleccionamos 3 togas? ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean muy pequeñas? Podemos representar este experimento con un árbol que tiene 8 ramas (¿cómo?). Esto nos permite extender el argumento de antes. En este caso la probabilidad deseada es $10/100 \times 9/99 \times 8/98$.

Esta situación facilita el generalizar la regla de multiplicación. Para facilitar la discusión representemos por T_1 el evento de que la primera toga sea muy pequeña, por T_2 el evento de que la segunda sea muy pequeña y por T_3 el evento de que la tercera toga sea muy pequeña. Vemos que 10/100 es la probabilidad de que la primera toga sea pequeña, es decir $P(T_1)$. El valor 9/99 representa la probabilidad de que la segunda sea pequeña si la primera fue pequeña, $P(T_2 \mid T_1)$. El valor 8/98 es un poco más complicado. Para obtener la tercera toga pequeña en sucesión, debimos haber seleccionado la primera y la segunda togas pequeñas, así, 8/98 es el resultado de calcular $P(T_3 \mid T_1 \text{ y } T_2)$.

La probabilidad de que las tres togas sean pequeñas es entonces
$P(T_1 \text{ y } T_2 \text{ y } T_3) = P(T_1)\, P(T_2 \mid T_1)\, P(T_3 \mid T_1 \text{ y } T_2)$. Este resultado se puede escribir ahora como un teorema.

Teorema 2

Sean A, B, C eventos cualquiera en un espacio muestral S tal que $P(A) > 0$ y $P(A \cap B) > 0$. Entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(A \mid B)\, P(C \mid A \cap B)$.

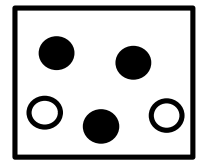
Prueba.
$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(C \mid A \cap B)\, P(A \cap B)$, usando la regla de multiplicación para los eventos C y $A \cap B$. Usamos nuevamente esa regla para calcular $P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$ y sustituimos arriba para obtener el resultado.

Pregunta
Usa inducción matemática para generalizar esta regla para n eventos.

Ejercicios y problemas

1. Considera una caja con cinco canicas. Dos de las canicas son blancas y las restantes son negras. Selecciona una canica al azar y anota su color.
    a. Representa el experimento usando un árbol.
    b. Enumera el espacio muestral.

c. Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que la canica seleccionada:



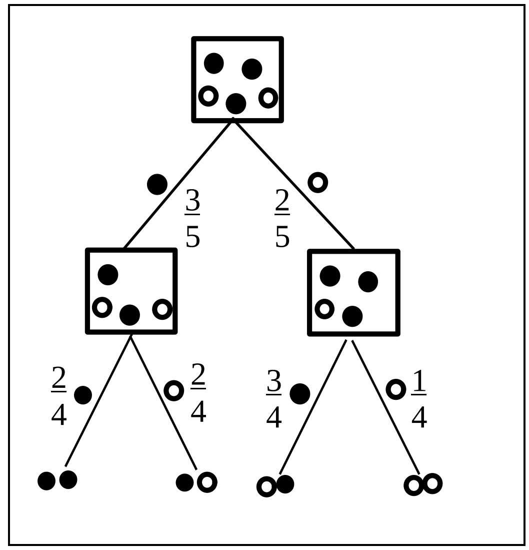
   i. sea negra.
   ii. sea blanca.
   iii. no sea negra
   iv. sea blanca o negra
   v. sea negra y blanca.

d. Ilustra los eventos de arriba en el árbol que representa el experimento y en un diagrama de Venn.

e. Encuentra la probabilidad de que la canica seleccionada:
   i. sea negra.
   ii. sea blanca.
   iii. no sea negra
   iv. sea blanca o negra
   v. sea negra y blanca.

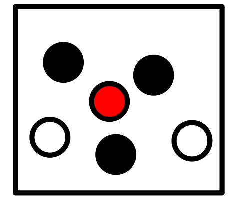
2. Considera una caja con cinco canicas. Dos de las canicas son blancas y las restantes son negras. Selecciona una canica al azar, anota su color y devuélvela a la caja. Selecciona otra canica y anota su color.
   a. Representa el experimento usando un árbol.
   b. Enumera el espacio muestral.
   c. Encuentra la probabilidad de que la primera canica seleccionada:
      i. sea negra.
      ii. sea blanca.
      iii. no sea negra
      iv. sea blanca o negra
      v. sea negra y blanca.
   d. Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que:
      i. ambas canicas seleccionadas sean negras.
      ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
      iii. ninguna canica sea blanca.
      iv. la segunda canica sea blanca si la primera fue negra.
      v. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
      vi. la segunda canica es blanca.
   e. Encuentra la probabilidad de que:
      i. ambas canicas seleccionadas sean negras.
      ii. una de las canicas selecionadas sea blanca.
      iii. ninguna canica sea blanca.
      iv. la primera canica es blanca y la segunda es negra,
      v. la segunda canica sea blanca si la primera fue negra.
      vi. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
   f. ¿Es el evento de que la primera canica sea negra independiente del evento de que la segunda canica sea blanca? Explica.
   g. ¿Son los eventos {la primera canica es negra}, {la segunda canica es blanca} mutuamente excluyentes? Explica.

3. Considera una caja con cinco canicas. Dos de las canicas son blancas y las restantes son negras. Selecciona una canica al azar, anota su color, esta vez no la devuelvas a la caja. Selecciona otra canica y anota su color.
    a. Enumera el espacio muestral.
    b. Encuentra la probabilidad de que:
        i. ambas canicas seleccionadas sean negras.
        ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
        iii. ninguna canica sea blanca.
        iv. la primera canica no es ni blanca ni negra.
        v. la primera canica es blanca y la segunda es negra.
        vi. la segunda canica sea blanca si la primera fue negra.
        vii. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
        viii. la segunda canica es blanca.
    c. ¿En qué se distingue este experimento del efectuado en el problema número 2?
    d. ¿Es el evento de que la primera canica sea negra independiente del evento de que la segunda canica sea blanca? Explica.
    e. ¿Son los eventos {la primera canica es negra}, {la segunda canica es blanca} mutuamente excluyentes? Explica.



4. Considera una caja con cinco canicas. Dos de las canicas son blancas y las restantes son negras. Selecciona una canica al azar, anota su color, devuélvela a la caja y añade a la caja dos canicas del mismo color de la canica seleccionada. Selecciona otra canica y anota su color.
    a. Representa el experimento usando un árbol.
    b. Enumera el espacio muestral.
    c. Encuentra la probabilidad de que:
        i. ambas canicas seleccionadas sean negras.
        ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
        iii. ninguna canica sea blanca.
        iv. la primera canica no es ni blanca ni negra.
        v. la primera canica es blanca y la segunda es negra.
        vi. la segunda canica sea blanca si la primera fue negra.
        vii. la primera canica sea blanca si la segunda no fue blanca.
        viii. la segunda canica sea negra.
    d. ¿Es el evento de que la primera canica sea negra independiente del evento de que la segunda canica sea blanca? Explica.
    e. ¿Son los eventos {la primera canica es negra}, {la segunda canica es blanca} mutuamente excluyentes? Explica.

5. Considera una caja con seis canicas. Dos de las canicas son blancas, una es roja y las restantes son negras. Selecciona una canica al azar, anota su color, devuélvela a la caja y añade a la caja dos canicas del mismo color de la canica seleccionada. Selecciona otra canica y anota su color.
    a. Representa el experimento usando un árbol.

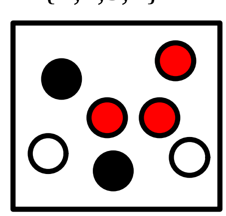


b. Enumera el espacio muestral.
c. Encuentra la probabilidad de que:
   i. ambas canicas seleccionadas sean rojas.
   ii. una de las canicas seleccionadas sea blanca.
   iii. ninguna canica sea blanca.
   iv. la primera canica no es ni blanca ni negra.
   v. la primera canica es blanca y la segunda es roja.
   vi. la segunda canica sea roja si la primera fue roja.
   vii. la primera canica sea negra si la segunda no fue blanca.
   viii. las dos canicas sean de colores distintos.
   ix. las dos canicas sean del mismo color.
   x. la segunda canica sea negra.
d. ¿Es el evento de que la primera canica sea roja independiente del evento de que la segunda canica sea blanca? ¿son estos eventos mutuamente excluyentes? Explica.
e. ¿Son los eventos {la primera canica es negra}, {la segunda canica es blanca} mutuamente excluyentes? Explica.

6. Considera una caja con cinco canicas. Dos de las canicas son blancas y las restantes son negras. A la misma vez, selecciona dos canicas al azar y anota sus colores.
   a. Representa el experimento usando un árbol.
   b. Enumera el espacio muestral.
   c. Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que las canicas seleccionadas:
      i. ambas sean negras.
      ii. ninguna sea negra.
      iii. sean de colores distintos.
   d. Ilustra los eventos de arriba en el árbol que representa el experimento.
   e. Encuentra la probabilidad de que las canicas seleccionadas:
      i. ambas sean negras.
      ii. niinguna sea blanca.
      iii. sean de colores distintos.
   f. ¿Tiene alguna relación este problema con el número 3 arriba? Éxplica.

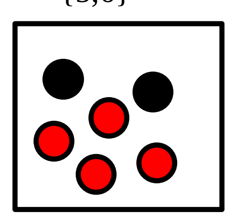
Hacemos un experimento con dos cajas. La caja A tiene siete canicas. En esta caja, dos de las canicas son blancas, tres son rojas y dos son negras. La caja B tiene seis canicas. Cuatro de las canicas en B son rojas y dos son negras. Se tira un dado para decidir de cuál caja se selecciona una canica al azar. Si se observa el evento {1,2,3,4} se selecciona una canica de la caja A. En el caso de observar el evento {5,6} se selecciona al azar una canica de la caja B.

{1,2,3,4}



Caja A

{5,6}



Caja B

a. Representa el experimento usando un árbol.
b. Enumera el espacio muestral.
c. Usa la notación y operaciones de conjuntos para representar el evento de que la canica seleccionada:
   i. sea negra.
   ii. no sea roja.
   iii. sea negra ó blanca.

    iv. provenga de la caja A
    v. sea roja y venga de la caja B.
    vi. sea blanca y venga de la caja B.

d. Ilustra los eventos de arriba en el árbol que representa el experimento.
e. Encuentra la probabilidad de que la canica seleccionada:
    i. sea negra.
    ii. no sea roja.
    iii. sea negra ó blanca.
    iv. provenga de la caja A
    v. sea roja y venga de la caja B.
    vi. sea blanca y venga de la caja A.
    vii. sea negra dado que viene de la caja B.
    viii. sea blanca dado que viene de la caja B.
    ix. haya provenido de la caja B dado que es blanca.
    x. haya provenido de la caja A dado que es roja.
f. ¿Puedes generalizar tus resultados en ix y x? Explica.