Independencia

Problema

Lanzamos una moneda y un dado al aire. Nos interesa encontrar la probabilidad de observar que la moneda sale cara y que el dado sale tres.

Si asumimos que todos los resultados observados al tirar un dado son equiprobables y que los resultados observados al tirar una moneda también son equiprobables, entonces P(3) = 1/6 y P(H) = 1/2. Nos interesa encontrar P(3 y H). Es natural suponer que el resultado en la moneda no afectará el resultado a observarse en el dado. Si eso así, esperaríamos que cerca de la mitad de las ocasiones que lancemos una moneda observaremos cara. De esa mitad de resultados donde obtenemos cara, en cerca de una sexta parte de ellos debe observarse el dado igual a 3. Así esperaríamos que la probabilidad de observar cara y tres a la misma vez ocurriría cerca de 1/12 de las veces.

Otra forma de ver esto es examinando el espacio muestral del esperimento:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
H	H,1	H,2	H,3	H,4	H,5	H,6
T	T,1	T,2	T,3	T,4	T,5	T,6

Tabla 1 Espacio muestral resultante el lanzar una moneda y un dado de seis caras

Cada uno de los 12 resultados observados debe ser equiprobable, por lo cual, cada uno de éstos debe tener probabilidad 1/12 de observarse. El único donde se observa el resultado deseado es {H, 3}, así P(H y 3) = 1/12.

Podemos usar la probabilidad condicional para obtener este resultado. La probabilidad de observar 3 cuando lanzamos el dado es 1/6. Una vez observado este resultado, lanzamos la moneda y con probabilidad 1/2 obtenemos cara. Así P(H y 3) = P(3) P(H | 3) = 1/6 $\times$ 1/2. En este caso vemos que P(H y 3) = P(3) P(H), o en forma equivalente, P(H | 3) = P(H).

Problema

Lanzamos dos dados y observamos que uno de los dos dados resultó ser igual a 3, ¿cuál es entonces la probabilidad de que la suma X sea igual a 8?¿de que X sea igual a 7?

Problema

Lanzamos un dardo en el siguiente tablero, si sabemos que cayó en B, ¿cuál es la probabilidad de que haya caido en C?

De estos ejemplo obtenemos una motivación para definir el concepto de independencia. Intuitivamente vemos que dos eventos deben zer independientes si el que ocurra uno no afecta la probabilidad de que el otro ocurra, es decir no anade información a la que ya teníamos. Formalmente decimos que dos eventos A, B son **independientes** si y solo si P(A | B) = P(A). Esto implica que los eventos A, B son independientes si y solo si P(A y B) = P(A) P(B) cuando P(B) > 0.

Problema

1. Dos máquinas operan independientemente. Sea A el evento de que la priumera máquina se dañe en algún momento durante el día de trabajo y sea B el evento de que la otra máquina se dañe durante el

mismo periodo. Del historial de las máquinas sabemos que la primera máquina se ha dañado en el 10% de los días de trabajo y que la segunda máquina se ha dañado en el 15% de los días. Encuentra la probabilidad de que por lo menos una de las máquinas no funciones durante el día de hoy.

2. Lanza dos dados. Sea A el evento de que observamos un 4 en el primer dado, B el evento de que la suma de los dados es 9 y C el evento de que la suma de los dos dados es 7. Demuestra que los eventos A, B no son independientes, mientras que los eventos A, C lo son. ¿Qué puedes decir de los eventos B, C?

Teorema 1

Si A, B son dos eventos independientes, entonces los eventos A y B^c son también independientes.

Prueba.
Sabemos que $A = AB^c \cup AB$, de donde $P(AB^c) = P(A) - P(AB)$.
Como A, B son independientes, $P(AB) = P(A)P(B)$, así sustituimos arriba y obtenemos:
$P(AB^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$.

Decimos que k eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son (totalmente) **independientes** si para cada subconjunto $A_{i1}, \ldots, A_{ij}$ de j de estos eventos (j = 1, 2, …, k) tenemos $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\, P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$.

Ejemplo 1

Considera el espacio muestral con cuatro resultados equiprobables: S = {1, 2, 3, 4}. Definamos los siguientes eventos: A = { 1, 2}, B = {1, 3} y C = {1, 4}. Entonces AB = AC= BC = ABC ={1}. Por lo tanto tenemos: P(A) = P(B) = P(C) = 1/2 y P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 1/4. Vemos que cuando tomamos los eventos de dos en dos obtenemos independencia, pero los eventos A,B,C no soin independientes entre sí.

Pregunta
Lanza una moneda al aire hasta que salga cara. Encuentra la probabilidad de que te tome exactamente n tiradas observar cara. Encuentra la probabilidad de que eventualmente observes cara.

Problema
¿Qué relacion hay entre los conceptos de independencia y de mutuamente excluyentes?Es decir, ¿pueden dos eventos A, B ser independientes y mutuamente excluyentes a la vez?